2.1.5 Graf funkce I

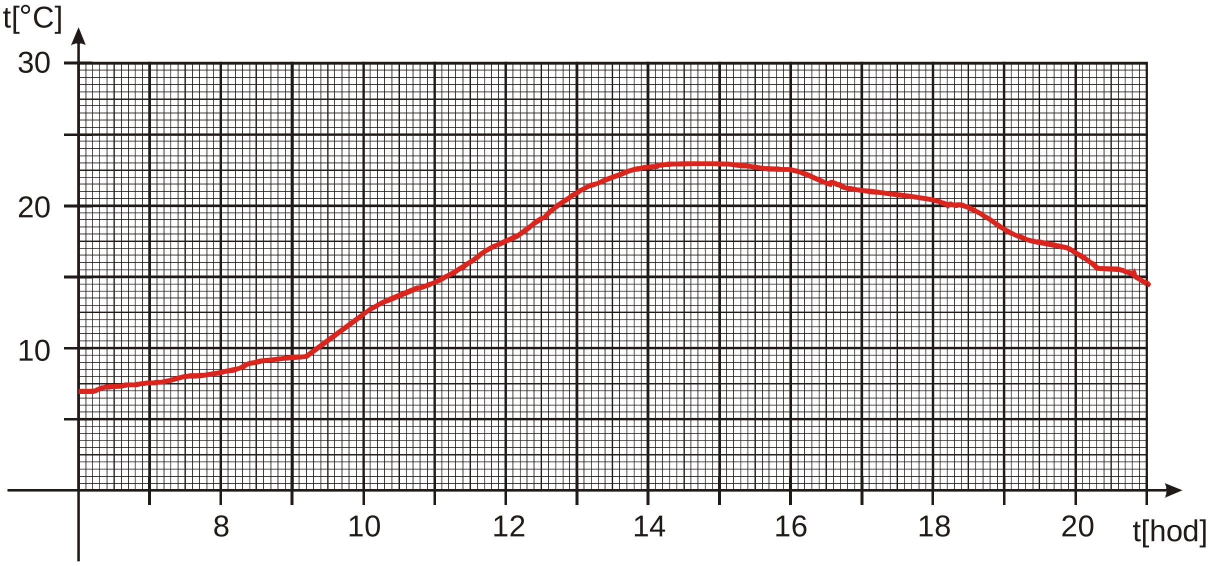
Předpoklady: 2104

Pedagogická poznámka: Největší změnou oproti klasickému řazení v gymnaziální sadě je spojení dílů o rovnicích a funkcích. Představa grafu umožňuje studentům daleko lépe pochopit o co při řešení rovnice a zejména nerovnic jde, případně jaké může být řešení. Je faktem, že minimálně polovina studentů má o grafech jen velice vágní povědomí a čtvrtina nejhorších neumí ani odečítat hodnoty. Proto se ukázalo, že je nutné zařadit na začátek kapitoly o funkcích několik hodin, které procvičují právě orientaci v grafech. Při probírání těchto tří hodin jsou mezi studenty obrovské rozdíly, nechávám rychlejší část třídy, aby si ve zbytku času potichu pracovala na čemkoliv a věnuji se těm nejhorším.

Pedagogická poznámka: Přesné odečítání není možné z obrázků promítaných z učebnice. Grafy jsou udělány ještě jednou ve speciálním souboru, který vytisknu a dám ho studentům k dispozici.
U termografu je pak možné trvat na přesném odečtení hodnot. Přitom se pozná, kdo ze studentů je schopen přepočítávat údaje na osách a zjistit velikost jednoho čtverečku.
U ostatních příkladů pak můžete při pomoci slabším studentům ukazovat prstem nebo tužkou do papírku před nimi, což je daleko názornější než blikání ukazovátkem na vzdálené stěně.
V neposlední řadě jde i o to, že grafy jsou příliš velké a nevejdou se v dostatečném přiblížení na stěnu najednou i s řešením.

Pedagogická poznámka: Ve všech příkladech je dobré studentům neustále ukazovat, že jde pořád o zobrazování cestou od čísel na ose x k číslům na ose y.

Př. 1: Z termografu na obrázku zjisti:
a) teplotu vzduchu v 8:00, 10:30, 6:00, 15:45 a 20:20,
b) jaká byla nejvyšší a nejnižší teplota,
c) v jakém časovém rozmezí byla teplota měřena,
d) v jakém rozsahu se pohybovaly teploty během měření,
e) definiční obor a obor hodnot zachycené funkce,
f) kdy byla teplota vzduchu vyšší než $20°$,
g) kdy byla teplota vzduchu nižší než $15°$.



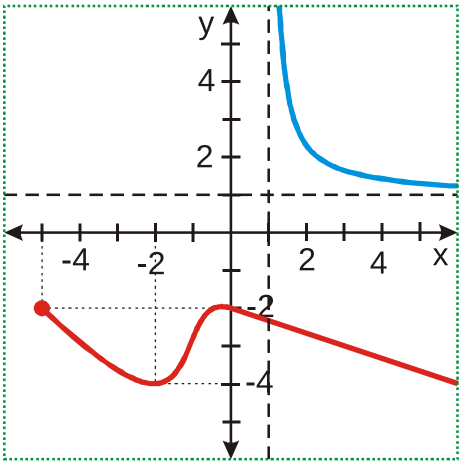
a) teplotu vzduchu:

čas	8:00	10:30	6:00	15:45	20:20
teplota	$8,3°C$	$13,7°C$	$7°C$	$22,5°C$	$15,4°C$

b) jaká byla nejvyšší a nejnižší teplota
Nnejvyšší teplota $23°C$, nejnižší teplota $7°C$.
c) v jakém časovém rozmezí byla teplota měřena
Od 6:00 do 21:00.
d) v jakém rozsahu se pohybovaly teploty během měření
Od $7°C$ do $23°C$.
e) definiční obor a obor hodnot zachycené funkce
Funkce nemá žádný předpis $\Rightarrow$ má smysl uvažovat o jejích hodnotách pouze pro čísla s nakreslenou hodnotou v grafu $\Rightarrow$ $D(f)=\langle 6;21\rangle$, $H(f)=\langle 7;23\rangle$.
f) kdy byla teplota vzduchu vyšší než $20°$
Od 12:42 do 18:24.
g) kdy byla teplota vzduchu nižší než $15°$
Od 6: 00 do 11:09, od 20:50 do 21:00 .

Pedagogická poznámka: Způsob, kterým studenti vnímají matematiku, dobře ilustrují dva fakty:
předchozí příklad je pro ně podstatně jednodušší než hledání funkčních hodnot v příkladu 4.
body c) d) udělají bez problémů, ale nedaří se jim bod e). Mají totiž problémy vztáhnout definici, kterou si mohou třeba i přečíst z poznámek z minulé hodiny, k něčemu reálnému. Upozorněte je na to.

Něž se pustíme do dalších příkladů, musíme si ujasnit, jak se grafy funkcí kreslí. Problém nastává, když chceme nakreslit funkci s velkým rozsahem definičního oboru nebo oboru hodnot. Máme k dispozici pouze omezenou plochu, na kterou se snažíme nakreslit všechno „důležité“ o chování funkce:



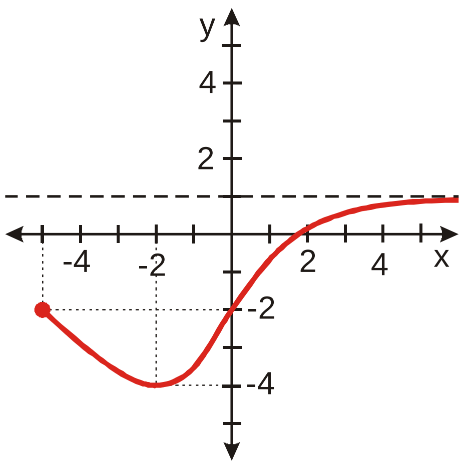
Pokud je graf funkce nakreslen až ke kraji obrázku (na obrázku je okraj vyznačen zelenými tečkami), **předpokládá se, že funkce pokračuje stejným způsobem dále** $\Rightarrow$

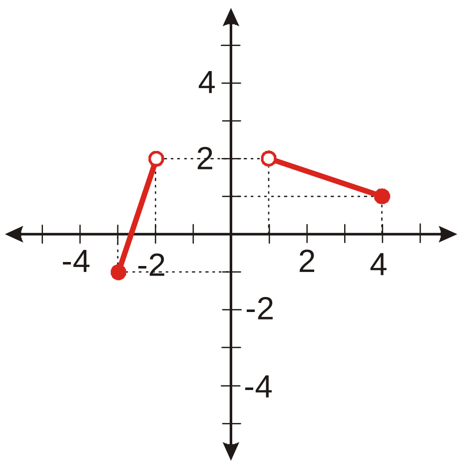
- červená funkce vpravo dole postupně směřuje šikmo dolů $\Rightarrow$ hodnoty *x* se postupně zvětšují k nekonečnu a hodnoty *y* se postupně zmenšují k mínus nekonečnu.

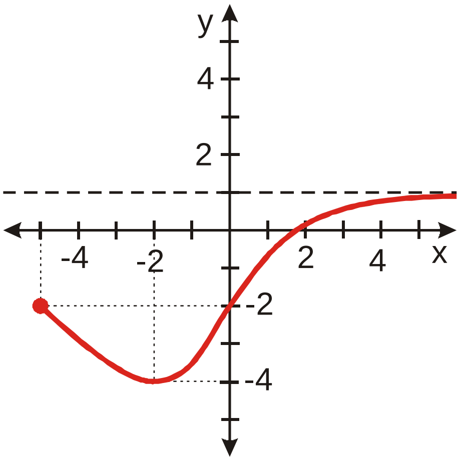
Aby bylo směřování funkcí zřejmější, kreslíme do obrázku pomocné čáry (svislá a vodorovná čárkovaná čára) $\Rightarrow$

- modrá funkce vpravo nahoře postupně zvětšuje hodnoty *x* k nekonečnu, hodnoty *y* se postupně zmenšují, ale ne k mínus nekonečnu jako u červené funkce, pouze se čím dál víc blíží k jedničce (vodorovná čára),
- modrá funkce se nahoře postupně zprava přibližuje k svislé čáře procházející jedničkou $\Rightarrow$ jak se hodnoty *x* zprava přibližují k 1, hodnoty *y* se přibližují k nekonečnu.

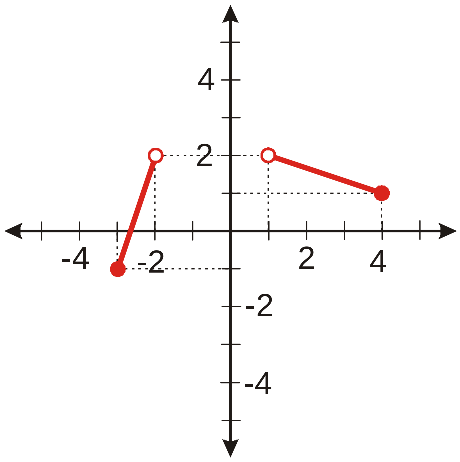
Př. 2: Na obrázcích jsou nakresleny grafy funkcí. Urči jejich $D(f)$ a $H(f)$.







$$D(f) = \langle -5; \infty)$$
$$H(f) = \langle -4; 1)$$



$$D(f) = \langle -3; -2) \cup (1; 4\rangle$$
$$H(f) = \langle -1; 2)$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je také opakováním sjednocení množin a intervalů. Je třeba trvat na tom, že je nutností, aby si tyto věci studenti pamatovali bez ohledu na to, že byly probrány už před dlouhou dobou.

Někteří studenti mají problémy s řešením předchozího příkladu kvůli tomu, že stále nepracují s tím, že definiční obor určují hodnoty z osy *x* a obor hodnoty čísla z osy *y*.

Př. 3: Na obrázku je nakreslen graf funkce. Urči:

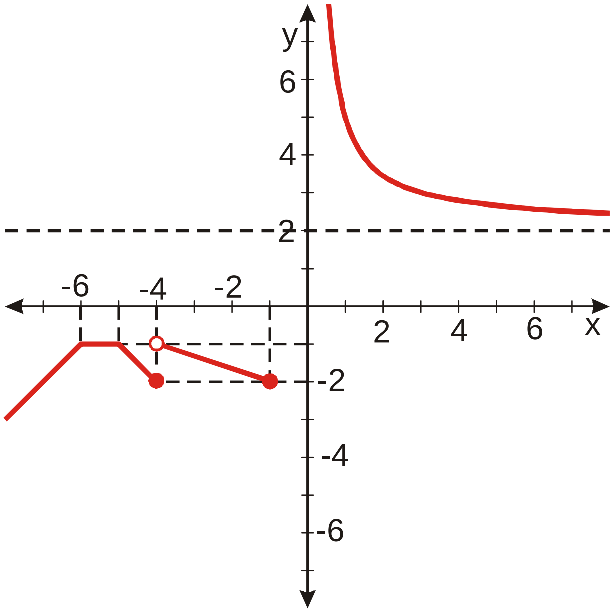
a) $D(f)$, $H(f)$, b) $f(-1)$, $f(3)$, $f(-4)$,

c) všechna x_1, pro která platí $f(x_1) = -2$,

d) všechna x_2, pro která platí $f(x_2) = -1$,

e) všechna *x*, pro která je hodnota funkce záporná,

f) všechna *x*, pro která je hodnota funkce větší než 4.



a)

$D(f) = (-\infty; -1\rangle \cup (0; \infty)$

$H(f) = (-\infty; -1\rangle \cup (2; \infty)$

b) $f(-1) = -2$, $f(3) = 3$, $f(-4) = -2$

c) $x_1 \in \{-7; -4; -1\}$

d) $x_2 \in \langle -6; -5\rangle$

e) $f(x) < 0$ pro $x \in (-\infty; -1\rangle$

f) $f(x) > 4$ pro $x \in (0; 1,5)$

Př. 4: Petáková:
strana 24/cvičení 11 a) b)

Shrnutí: Graf funkce nám ukazuje cestu od čísel na ose *x* (definiční obor) k číslům na ose *y* (obor hodnot).